Lec 26 定积分应用举例

26.1 计算数列极限

若 $f \in C[a,b]$, 则 $f \in R[a,b]$, 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$.

由此我们可以计算以下求和式的极限.

例 26.1 求下列数列极限,$p > 0$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\left(\dfrac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{p+1}$;
2. $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n \ln(1+\dfrac{i}{n})\dfrac{1}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x)\big|_0^1 - \int_0^1\dfrac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$;
3. $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\dfrac{1}{n} = \int_0^1\dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2\right)$.

26.2 积分中值定理与积分平均值 $\bar{f}$

设 $f(x)\in C[a,b]$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$. 设 $f(x)\geqslant 0$, 则左式是曲边梯形面积, 右式是矩形面积, 他们具有一个共同的腰 $[a,b]$. 其中 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分平均值.

1. 设某地某日的气温变化规律为 $f(t) = \dfrac{10}{3t+1}, t\in[0,24]$ 则此地这天的平均气温为 $\bar{f} = \dfrac{1}{24-0}\int_0^{24}\dfrac{10}{3t+1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{5}{36}\ln(3t+1)\big|_0^{24}\approx 0.596$.
2. 用计算机求解 $\bar{f} = f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\approx\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$, 其中 $x_i = a++\dfrac{b-a}{n}i, i = 1,2,\cdots,n$.

26.3 定积分与 n 阶 Taylor 公式

设 $f \in C^{n+1}(\bar{U}(a,\delta))$, 则
$f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}f(t) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}(t-x) = f(a) + (t-x)f'(t)\big|_a^x - \int_a^x (t - x)f''(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

因此记 $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + R_n(x)$. 称 $R_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 n 阶积分型余项. 由积分型余讨论其阶数, 我们可以得到 Peano 余项的 Taylor 公式; 由积分型余项和积分中值定理, 我们可以得到 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

26.4 定积分与几何度量

例 26.2 求椭圆 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ 绕 oy 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解 取参数方程 $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$, 则 $V = 2\pi \int_0^{2\pi} xy\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\sin t)\,\mathrm{d}(a\cos t) = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$

例 26.3 求椭圆 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ 的弧长.

解 取参数方程 $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$, 则 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\mathrm{d}\,x)^2 + (\mathrm{d}\,y)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}$
$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$

由 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$.

若取 $\sqrt{1-(e\cos\theta)^2} = 1 - \frac{1}{2}(e\cos\theta)^2$, 则 $L = 2\pi a - \frac{\pi}{2}e^2 a$.

若取 $\sqrt{1-(e\cos\theta)^2} = 1 - \frac{1}{2}(e\cos\theta)^2 - \frac{1}{8}(e\cos\theta)^4$, 则 $L = 2\pi a - \frac{\pi}{2}e^2 a - \frac{3e^4}{256}a\pi$.

26.5 用积分定义函数

若 $f(x) \in C(I)$, 则 $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 I 上的连续可微函数, 且 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. 即区间 I 上的连续函数必有原函数 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 事实上 $f(x)$ 的原函数至少包括 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$, 故有无穷多个.

1. $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$;
2. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$;

3. $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, x>0, y>0.$

例 26.4 计算反常积分:$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

解 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)\mathrm{d}x.$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2-2}=-2\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|\Big|_0^{+\infty}=-2\left(\ln 1-\ln 1\right)=0.$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi\sqrt{2}.$

因此 $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

✍ 作业 ex5.1:25(1)(3),28,30;ex5.3:3(2),5(2)(4).